**Exercice 1.** Notons $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors on calcule directement que

$$AX - XA = \begin{pmatrix} c & d-a \\ 0 & -c \end{pmatrix}.$$

On voit que $X$ commute avec $A$ si et seulement si $a = d$ et $c = 0$, donc $X$ est une matrice du type $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

---

**Exercice 2.**
1. Une base du noyau est fournie par : $\{(1,0,1)\}$.
2. Le rang de $A$ est égal à 2.
3. On a $\chi_A = -X^3 + 2X^2 - 10X = -X(X^2 - 2X + 10)$.
4. Le polynôme caractéristique n'est pas scindé sur les réels, donc $A$ n'est pas diagonalisable sur les réels.
5. Il y a trois valeurs propres distinctes sur $\mathbb{C}$ (qui sont $0, 1+3i, 1-3i$), donc $A$ est une matrice diagonalisable sur les complexes (on peut aussi observer que sur le corps des complexes, le polynôme caractéristique est scindé avec des racines simples, en effet $\chi_A = -X(X-1-3i)(X-1+3i)$).

---

**Exercice 3.**
1. Non. Par exemple, si $P = (X-1)^3$ et $Q = (X-1)^2$ ont les mêmes racines. L'affirmation est toutefois correcte si on suppose que les racines de $f$ et $g$ sont simples, ou plus généralement qu'elles ont même multiplicité.
2. Oui. Soit $P = a_0 + a_1 X + \cdots a_n X^n$ avec $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$ et $a_n \neq 0$. Donc $\deg(f) = n$.

   Soit $Q = b_0 + b_1 X + \cdots b_m X^m$ avec $b_0, b_1, \cdots, b_m \in \mathbb{C}$ et $b_m \neq 0$. Donc $\deg(g) = m$.

   Or, $P - Q = (a_0 + a_1 X + \cdots a_n X^n) - (b_0 + b_1 X + \cdots b_m X^m)$ et le degré d'un terme non nul dans cette formule ne dépasse pas $\max\{n, m\}$. L'assertion s'en déduit.

   Observons que le degré de $P - Q$ peut être strictement plus petit que le maximum des degrés de $P$ et de $Q$. Par exemple, si $P = X$ et $Q = X - 1$, alors $f - g = 1$ qui est de degré 0, strictement plus petit que le maximum des degrés de $P$ et de $Q$, qui valent 1 dans cet exemple.
3. Oui. On sait que $a \in \mathbb{C}$ est une racine d'un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ si et seulement si $Q(a) = 0$. Maintenant posons $Q = P - P(a)$. Alors $g(a) = f(a) - f(a) = 0$ et donc $X - a$ divise $Q = P - P(a)$. Mais cela se voit directement également, car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$X^n - a^n = (X-a)(X^{n-1} + aX^{n-2} + a^2 X^{n-3} + \cdots + a^{n-2}X + a^{n-1}).$$

4. Non, car on a la factorisation $X^2+2=\left(X+\sqrt{2}i\right)\left(X-\sqrt{2}i\right)$ dans $\mathbb{C}[X]$.

---

**Exercice 4.** 1. Le reste de la division de $P$ par $Q_1$ est $S_1=-(9X+3)$ (et le quotient est $R_1=2X^3+4X^2+5X$) ; on a en effet

$$2X^5+X^3-2X^2+X-3=(X^2-2X+2)(2X^3+4X^2+5X)-(9X+3),$$

c'est-à-dire $P=Q\cdot R_1+S_1$.

Appliquons l'algorithme pour trouver ce résultat. On a successivement :

$$\begin{aligned}&P-2X^3Q_1=4X^4-3X^3-2X^2+X-3\\&P-2X^3Q_1-4X^2Q_1=5X^3-10X^2+X-3\\&P-2X^3Q_1-4X^2Q_1-5XQ_1=-9X-3=-3(X+3),\end{aligned}$$

ce qui montre que

$$P=(2X^3+4X^2+5X)Q_1-3(3X+1).$$

De même, le reste de la division de $P$ par $Q_2$ est $S_2=X-2$ (et le quotient est $R_2=X^2+\frac{1}{2}$)

$$2X^5+X^3-2X^2+X-3=(2X^3-2)\left(X^2+\frac{1}{2}\right)+(X-2),$$

c'est-à-dire $P=Q_2\cdot R_2+S_2$.

En effet, on a

$$\begin{aligned}P-X^2Q_2&=X^3+X-3\\P-X^2Q_2-\frac{1}{2}Q_2&=X-2,\end{aligned}$$

ce qui montre que

$$P=\left(X^2+\frac{1}{2}\right)Q_2+X-2.$$

2. On rappelle que $\zeta\in\mathbb{C}$ est une racine de $Q_2$ si et seulement si $Q_2(\zeta)=0$. En particulier pour un tel $\zeta$ on a

$$P(\zeta)=Q_2(\zeta)\cdot R_2(\zeta)+S_2(\zeta)=S_2(\zeta)=\zeta-2.$$

Les racines de $Q_2=2X^3-2=2(X^3-1)$ sont les racines cubiques de l'unité, c'est-à-dire, $\alpha=1$, $\beta=e^{\frac{2\pi i}{3}}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\gamma=e^{-\frac{2\pi i}{3}}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $P(1)=S_2(1)=-1$ et de même

$$f\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=S_2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{5}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$f\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=S_2\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{5}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Remarquez qu'on a calculé ces valeurs en appliquant le polynôme $R_2$ qui est de degré 1 et en évitant de calculer avec le polynôme $Q$, qui est de degré 5.

---

**Exercice 5.**

1. Comme
$$P=(X-a)(X-\overline{a})=X^2-2\,\mathrm{Re}\,(a)\,X+|a|^2,$$
ce qui montre que $P$ est réel.
2. Supposons que $Q$ est de la forme $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$.

   Comme $z$ est une racine de $g$, on a $g(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0$. On obtient que
$$Q(\overline{z})=\sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z}^k=\sum_{i=0}^{n}\overline{a_k}\;\overline{z}^k=\overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k}=\overline{g(z)}=\overline{0}=0,$$
où on a utilisé le fait que $\overline{a_k}=a_k$, car $a_k\in\mathbb{R}$.
3. Le seul polynôme irréductible unitaire de degré 0 est le polynôme constant $P=1$. Soit maintenant, $P\in\mathbb{R}[X]$ un polynôme irréductible unitaire de degré $n\geq 1$. Comme tout polynôme de degré $n\geq 1$ admet une racine dans $\mathbb{C}$, on prend $z$ une racine de $f$ dans $\mathbb{C}$.

   Si $z\in\mathbb{R}$, alors $X-z$ divise $P$ et donc $P=X-z$ car $P$ est irréductible.

   Si $z$ n'est pas réel, son conjugué $\overline{z}$ est aussi une racine de $P$ d'après b), et donc $(X-z)(X-\overline{z})$ divise $P$.

   Comme $(X-z)(X-\overline{z})\in\mathbb{R}[X]$ d'après a), et comme $P$ est irréductible, $P=(X-z)(X-\overline{z})$.

   Notons que le discriminant de $(X-z)(X-\overline{z})$ est négatif car les racines ne sont pas réelles.

   Conclusion : Les polynômes irréductibles unitaires dans $\mathbb{R}[X]$ sont donc les polynômes suivants :

   (a) Le polynôme constant $1\in\mathbb{R}[X]$.
   (b) Les polynômes de la forme $X+a$ avec $a\in\mathbb{R}$.
   (c) Les polynômes de la forme $X^2+bX+c$, avec $b,c\in\mathbb{R}$, et sans racine réelle (c'est-à-dire tel que $b^2-4c<0$).

---

**Exercice 6.** 1 L'hypothèse $f \circ g \neq g \circ f$ entraîne que $f$ et $g$ sont non nuls. Supposons par l'absurde que $f$ et $g$ sont linéairement dépendants, alors il existe $\lambda \in K$ tel que $f = \lambda g$, mais dans ce cas $f$ et $g$ commutent.

(b) Si $f \in \mathrm{GL}(V)$, alors 0 n'est pas valeur propre de $f$ (car $f$ est inversible, et $0 \in \sigma(f)$ implique que $\dim \mathrm{Ker}(f) > 0$). Soit $\lambda \in \sigma(f)$, et soit $v \in V \setminus \{0\}$ un vecteur propre de $f$ de valeur propre $\lambda$. Alors,

$$f(v) = \lambda\, v \quad \Longleftrightarrow \quad v = f^{-1}(\lambda\, v) \quad \Longleftrightarrow \quad f^{-1}(v) = \lambda^{-1} f^{-1}(\lambda\, v) = \lambda^{-1} v,$$

ce qui montre que $\lambda^{-1} \in \sigma(f^{-1})$ et $v \in E_{\lambda^{-1}}(f^{-1})$. L'argument étant symétrique, on en déduit que $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ est valeur propre de $f$ si et seulement $\lambda^{-1}$ est valeur propre de $f^{-1}$. De plus, on a

$$E_\lambda(f) = E_{\lambda^{-1}}(f^{-1}).$$

Les multiplicités géométriques de $\lambda$ pour $f$ et de $\lambda^{-1}$ pour $f^{-1}$ sont donc les mêmes.

---

**Exercice 7.**

1. Supposons que $x \in \mathrm{Ker}(f)$, alors

$$f(g(x)) = f \circ g(x) = g \circ f(x) = g(f(x)) = g(0) = 0.$$

donc $g(x) \in \mathrm{Ker}(f)$, ce qui prouve que le noyau de $f$ est invariant par $g$.

De même, soit $y \in \mathrm{Im}(f)$, alors il existe $x \in V$ tel que $f(x) = y$, alors on a

$$g(y) = g \circ f(x) = f \circ g(x) = f(g(x)) \in \mathrm{Im}(f),$$

ce qui montre que l'image de $f$ est invariant par $g$.

2. Si $E_\lambda$ est un espace propre de $f$ associé à la valeur propre $\lambda$ alors si $x \in E_\lambda$

$$f(x) = \lambda\, x.$$

Ainsi $g$ étant un endomorphisme, on a

$$f(g(x)) = f \circ g(x) = g \circ f(x) = g(\lambda\, x) = \lambda\, g(x).$$

On peut donc conclure que $E_\lambda$ est invariant par $g$.

---

**Exercice 8.** La réponse est que $\mathrm{rang}(f) = 5$ pour tout $\alpha$. En effet, on remarque que

$$\chi_f = X \cdot (X^2 + \alpha\, X + 1) \cdot (X^3 - 1),$$

en particulier $\lambda = 0$ est valeur propre et sa multiplicité algébrique est 1. Donc la multiplicité géométrique de $\lambda = 0$ est aussi égale à 1. On rappelle que pour toute valeur propre $\lambda$, on a

$$1 \leqslant \mathrm{multgeom}_\lambda(f) \leqslant \mathrm{multalg}_\lambda(f).$$

Donc $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E_0(f)) = 1$. Et par le théorème du rang,

$$\mathrm{rang}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = 6 - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 5.$$

---

**Exercice 9.** 1) Pour chacune des quatre matrices, le polynôme caractéristique est $\chi = -(X-\alpha)^3$ et donc $\alpha$ est l'unique valeur propre dans les trois cas.

La multiplicité géométrique $m$ de $\alpha$ se trouve en calculant la dimension du noyau de $A - \alpha\,\mathrm{I}_3$ (une méthode efficace pour faire cela est de calculer le rang de $A - \alpha\,\mathrm{I}_3$ et d'appliquer le théorème du rang).

On trouve que $m = 3$ pour $A_1$, $m = 2$ pour $A_2$ et $A_4$ et $m = 1$ pour $A_3$.

2) Il y a plusieurs critères utiles pour la diagonalisabilité des matrices. L'un de ces critères dit que la somme des multiplicités géométriques des valeurs propres doit être égale à la dimension de l'espace vectoriel. Avec ce critère on voit que seule $A_1$ est diagonalisable (cette matrice est en fait déjà diagonale).

3) Puisque deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres avec même multiplicités, on en déduit que $A_1$ n'est semblable à aucune autre de ces matrices, de même pour $A_3$. Il reste à examiner si $A_4$ et $A_2$ sont semblables. Or on constate que l'effet géométrique de ces deux matrices sur les vecteurs de la base canonique est le même après échange de $e_1$ et $e_2$. On a en effet

$$\begin{cases} A_2 \cdot e_1 = \alpha\, e_1 \\ A_2 \cdot e_2 = \alpha\, e_2 \\ A_2 \cdot e_3 = e_2 + \alpha\, e_3 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} A_4 \cdot e_1 = \alpha\, e_1 \\ A_4 \cdot e_2 = \alpha\, e_2 \\ A_4 \cdot e_3 = e_1 + \alpha\, e_3, \end{cases}$$

Donc si on pose $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c'est la matrice qui échange $e_1$ et $e_2$), alors on vérifie directement que $A_4 = P^{-1} A_2 P$ (observer que $P^{-1} = P$). Les matrices $A_2$ et $A_4$ sont donc semblables.

---

**Exercice 10.** 1. Notons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors on a

$$\chi_A = \det \begin{pmatrix} a - X & b \\ c & d - X \end{pmatrix} = X^2 - (a+b)X + (ad - bc) = X^2 - \mathrm{Tr}(A) \cdot X + \det(A).$$

D'autre part, on a aussi

$$B = \mathrm{Cof}(A)^\top = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad (A + B) = (a+d)\mathrm{I}_2 \quad \text{et} \quad BA = (ad - bc)\mathrm{I}_2,$$

où $\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité. Donc

$$X^2 - (A + B)X + BA = X^2 + (a+d)X + (ad - bc)\mathrm{I}_2 = \chi_A(X).$$

2. On a

$$(X-B)(X-A) = X^2 - XA - BX + BA,$$

donc, en utilisant le résultat en (a), on voit que

$$(X-B)(X-A) - \chi_A(X) = AX - XA,$$

qui vaut 0 si et seulement si $AX = XA$.

3. On applique le résultat 2. à la matrice $X = A$, qui commute évidemment avec elle-même. On conclut donc que

$$\chi_A(A) = (A-B)(A-A) = 0 \in \mathrm{M}_2(\mathbb{K}),$$

ce qui prouve le théorème de Cayley-Hamilton pour les matrices $2 \times 2$.